O golobih in golobnjakih

Primož Šparl

UL PEF, UP IAM, IMFM

FAMNITovi

Izleti v matematično vesolje

UP FAMNIT, Koper, 26. oktobra 2022

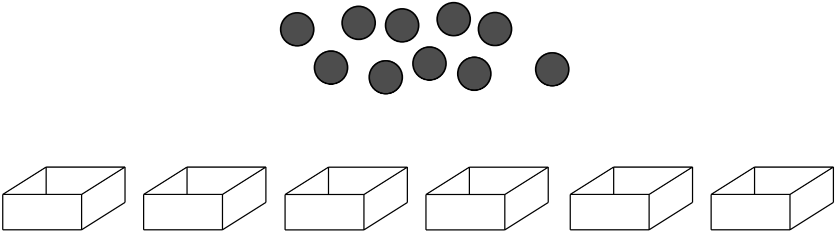

INDEX
The Detroit News
1986
1988
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1999
2000
2001
2002

Kaj pričakovati?

- Kaj sploh je *Princip golobnjaka*?
- Kako dolgo je že znan?
- Ja tako "trivialna" stvar sploh lahko uporabna?
- Zgledi, zgledi in še več zgledov uporabe.

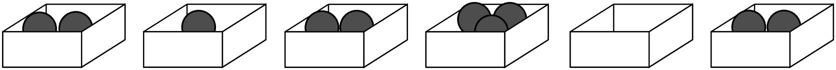
Kaj sploh je *Princip golobnjaka*?

- Gre za povsem “očitno” zadevo.



Kaj sploh je *Princip golobnjaka*?

- Gre za povsem "očitno" zadevo.



Kaj sploh je *Princip golobnjaka*?

Izrek

Imejmo m predalčkov in n reči, kjer sta $m, n \in \mathbb{N}$ in je $n > m$. Če teh n reči spravimo v teh m predalčkov, potem sta v vsaj enem predalčku vsaj dve reči.

- Čeprav je stvar "očitna", si oglejmo formalen dokaz.
- Za vsak i, $1 \leq i \leq m$, naj bo P_i množica reči v i-tem predalčku.
- Seveda je $|P_i| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ za vse i, $1 \leq i \leq m$.

Kaj sploh je *Princip golobnjaka*?

- Velja $n = |P_1| + |P_2| + \cdots + |P_m|$.
- Če v nobenem predalčku ni vsaj dveh reči, je $|P_i| \leq 1$ za vse i, $1 \leq i \leq m$, od koder sledi

$$n = \sum_{i=1}^{m} |P_i| \leq \sum_{i=1}^{m} 1 = m < n,$$

  kar je seveda nemogoče.
- Torej res za vsaj en i, $1 \leq i \leq m$, velja $|P_i| \geq 2$.

Kako dolgo je že znan?

- V letih 1622 in 1624 Jean Leurechon izda knjigi, v katerih ga omeni.
- Bolj znano, da je princip obravnaval (1834) in uporabljal Peter Gustav Lejeune Dirichlet.
- Sam ga je imenoval “princip predalčkov” (*Schubfachprinzip*).
- Zato je princip znan tudi pod imenom *Dirichletov princip*.

Preprosta posplošitev

- V knjigi R. A. Brualdija (*Introductory Combinatorics*) najdemo tole posplošitev in njeno očitno posledico:

Izrek

Imejmo m *predalčkov, dana pa naj bodo tudi naravna števila* $k_1, k_2, \ldots, k_m$. *Tedaj velja naslednje. Če vsaj* $k_1 + k_2 + \cdots + k_m - m + 1$ *reči spravimo v teh* m *predalčkov, potem obstaja* i, $1 \leq i \leq m$, *da je v* i*-tem predalčku vsaj* k_i *reči.*

Posledica

Imejmo m *predalčkov in* n *reči, ki jih spravimo v teh* m *predalčkov. Če za neko naravno število* k *velja* $n > km$, *potem je v vsaj enem predalčku vsaj* $k+1$ *reči.*

Je ta princip res lahko koristen?

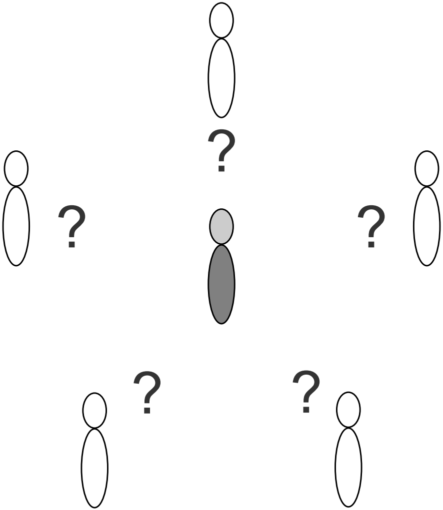
- Oglejmo si kak zgled...
- ...ali pa še kakšnega več,...
- ...potem pa presodite sami.
- Nekateri povzeti po knjigah (Bona; Brualdi; Harris, Hirst, Mossinghoff; itd.)
- Vir fotografij: www.pexels.com

Zgled: prijatelji in neznanci

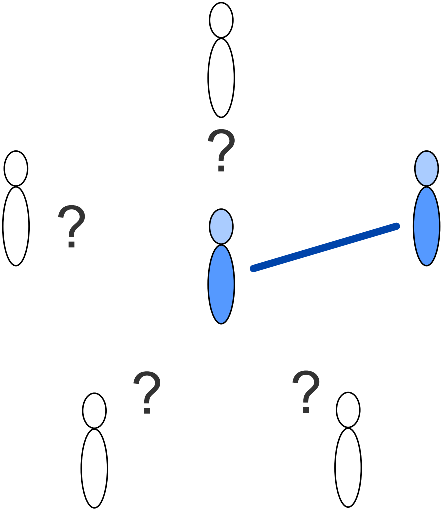
Zgled: prijatelji in neznanci

- Imamo (poljubno) skupino šestih ljudi.
- Tedaj med njimi obstaja trojica, v kateri se bodisi vsi medsebojno poznajo, bodisi nihče ne pozna nikogar. (Privzamemo: če A pozna B-ja, tudi B pozna A-ja.)
- Seveda si lahko ogledamo vsako možnost posebej...
- ...a jih je kar $2^{15} > 30\,000$.

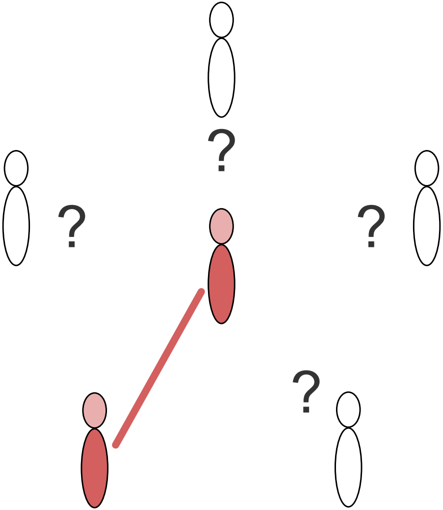
Zgled: prijatelji in neznanci



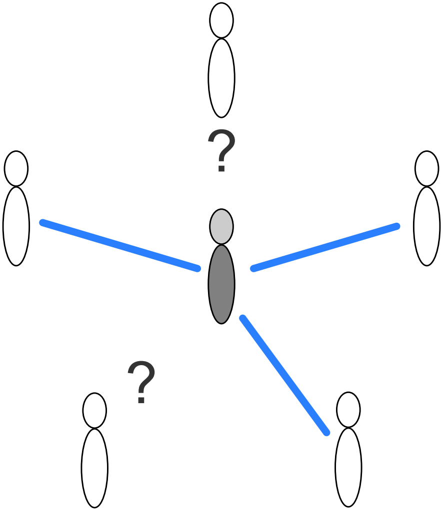
Zgled: prijatelji in neznanci



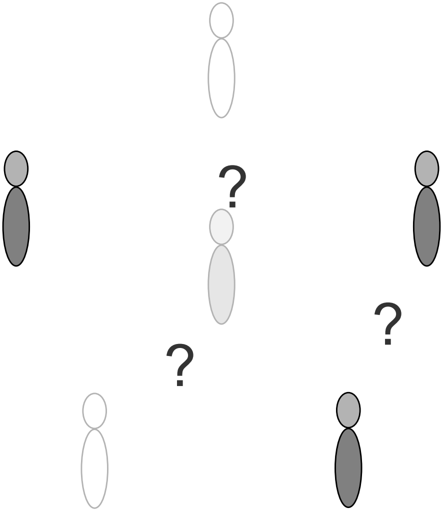
Zgled: prijatelji in neznanci



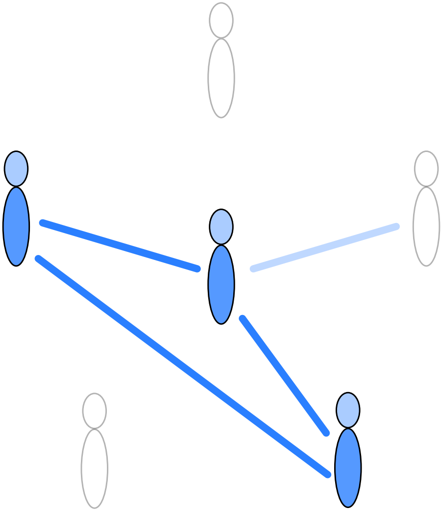
Zgled: prijatelji in neznanci



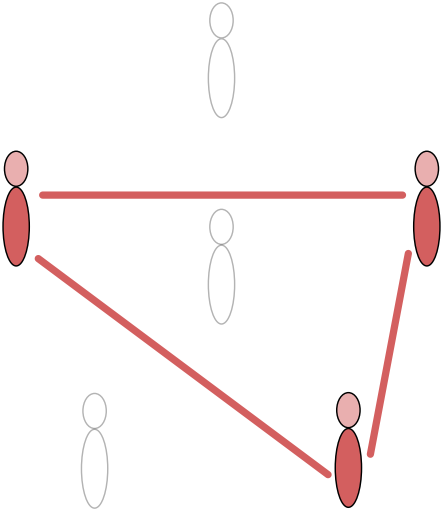
Zgled: prijatelji in neznanci



Zgled: prijatelji in neznanci



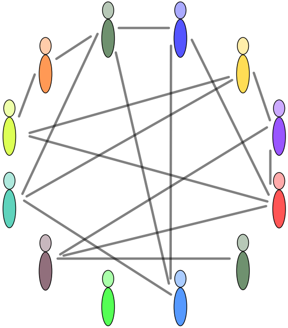
Zgled: prijatelji in neznanci



Zgled: rokovanja

Zgled: rokovanja

- Na kongres stranke pride 2022 ljudi. Nekateri se tekom kongresa med seboj rokujejo. Je res, da v vsakem trenutku kongresa obstajata dva udeleženca, ki sta do tega trenutka opravila isto število rokovanj?



Zgled: rokovanja

- Zdi se, da princip golobnjaka ne uspe:
  - imamo 2022 golobov (udeleženci)
  - in 2022 golobnjakov (posameznikovo število rokovanj)
- Pa je res mogoče, da niti eden od golobnjakov ni prazen?
- Golobnjaka 0 in 2021 se "izključujeta".

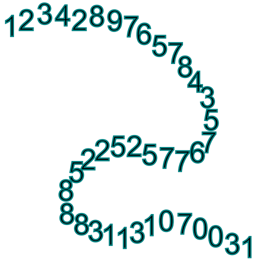
Zgled: rojstni dnevi

Zgled: rojstni dnevi

- Ali v Sloveniji v tem trenutku zagotovo živi vsaj 60 ljudi, ki so se rodili na isti dan (v smislu dd.mm.llll)?
  - Delež prebivalcev, starejših od 65 let, je trenutno dobrih 21% (vir: SURS).
  - "Varno" privzeti, da je starejših od 70 let manj kot 20%.
  - Vseh prebivalcev Slovenije je nekaj več kot 2 milijona, torej je mlajših od 70 let vsaj 1 600 000.
  - V 70 letih se zvrsti manj kot $70 \cdot 366 = 25\,620$ dni.
  - $25\,620 \cdot 62 = 1\,588\,440 < 1\,600\,000$, torej obstaja vsaj 63 ljudi, ki so mlajši od 70 let in so rojeni na isti dan.

Zgled: zaporedje in deljivost

2
26
262
2626
26262
262626
2626262
26262626
262626262
2626262626
26262626262
262626262626
2626262626262
26262626262626
262626262626262
2626262626262626
26262626262626262
262626262626262626



Zgled: zaporedje in deljivost

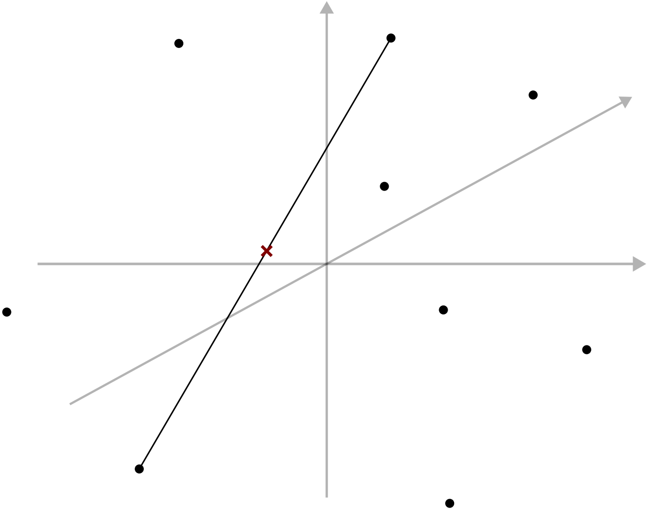
- Ali vsako naravno število m z zadnjo števko 1 deli vsaj en člen neskončnega zaporedja $2, 26, 262, 2626, 26262, \ldots$?
  - Trdimo, da ustrezen člen zaporedja najdemo že med prvimi $m+1$ členi, ki se končajo s 6.
  - Označimo n-ti člen z a_n in razdelimo teh $m+1$ "golobov" $(a_2, a_4, \ldots, a_{2m+2})$ glede na ostanek pri deljenju z m.
  - Imamo torej a_{2j}, a_{2i}, kjer je $1 \leq i < j \leq m+1$, ki imata isti ostanek pri deljenju z m.
  - Torej m deli $a_{2j} - a_{2i} = a_{2(j-i)} \cdot 10^{2i}$.
  - Ker m ni deljivo niti z 2 niti s 5, mora m deliti $a_{2(j-i)}$.

Zgled: deljivost vsote ali razlike

Zgled: deljivost vsote ali razlike

- Naključno izberemo 1013 paroma različnih naravnih števil. Lahko med njimi zagotovo najdemo dve, katerih razlika ali vsota je deljiva z 2022?
  - Golobnjaki: možni ostanki pri deljenju z 2022.
  - Golobi: za vsako izbrano število a imamo "goloba" a in $-a$.
  - Golobnjaka 0 in 1011 obravnavamo posebej.
  - Če še nimamo ustreznega para, je v ostalih golobnjakih skupaj vsaj $2026 - 4 = 2022$ golobov, torej v vsaj enem vsaj dva.
  - Zagotovo gre bodisi za števili oblike a in b ali $-a$ in $-b$ bodisi števili oblike a in $-b$ ali $-a$ in b.

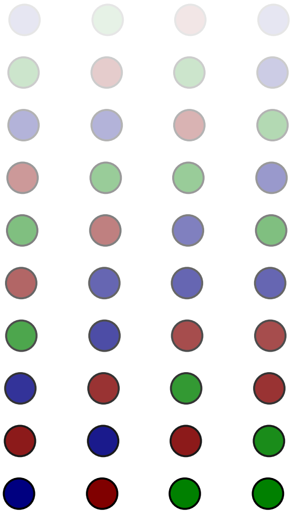
Zgled: celoštevilska prostorska mreža



Zgled: celoštevilska prostorska mreža

- V celoštevilski prostorski mreži $\mathbb{Z}^3$ (koordinate so (x, y, z), kjer $x, y, z \in \mathbb{Z}$) naključno izberemo 9 točk. Obstaja par, da je razpolovišče daljice, ki ju povezuje, v $\mathbb{Z}^3$?
  - Golobnjaki: trojice (i, j, k), kjer $i, j, k \in \{0, 1\}$.
  - Golobi: izbrane točke.
  - Golobi v golobnjake glede na parnost.
  - Če sta (x, y, z) in (x', y', z') v istem golobnjaku, $x' - x, y' - y, z' - z \in 2\mathbb{Z}$, torej $((x' - x)/2, (y' - y)/2, (z' - z)/2) \in \mathbb{Z}^3$.

Zgled: enobarvni pravokotnik



Zgled: enobarvni pravokotnik

- Vsak od 4×100 krogcev je pobarvan z eno od treh danih barv. Nujno obstaja "pravokotnik" z oglišči iste barve?
  - Golobnjaki: četverice (b_1, b_2, b_3, b_4), kjer $b_i \in \{m, r, z\}$.
  - Golobi: "vrstice"
  - Golobi v golobnjake glede na "barvno paleto".
  - Največ $3^4 = 81$ palet, torej imamo vrstici z isto paleto.
  - V paleti zagotovo dvakrat ista barva (ker $4 > 3$).
- Izziv: bi zadoščalo že 4×20 krogcev?

Zgled: IMO 1972

31 8 54

12 51 35

99

77 19

28

- Naključno izberemo 10 različnih naravnih števil, ki ne presegajo 100. Lahko zagotovo najdemo dve disjunktni neprazni podmnožici z isto vsoto?
  - Golobi: neprazne podmnožice (1023).
  - Golobnjaki: možne vsote (največja manj od $10 \cdot 100$)
  - Torej dve podmnožici z isto vsoto.
  - Če nista disjunktni, pač odstranimo skupne elemente.

Zgled: naraščajoče/padajoče podzaporedje

12 31 1852 7022 302 117 313 91 991 1552 112 62530182 6 7263 1 81 712 921 601 1101 70 717 801 521 13 505

Zgled: naraščajoče/padajoče podzaporedje

- Dano zaporedje $mn + 1$ realnih števil. Obstaja naraščajoče podzaporedje dolžine $m + 1$ ali pa padajoče podzaporedje dolžine $n + 1$? (P. Erdös, G. Szekeres, 1935)
  - V nasprotnem od vsakega (vključno) a_i naprej naršč. maks. dolžine m, padaj. pa maks. dolžine n.
  - Golobnjaki: pari (s, t), $1 \leq s \leq m$, $1 \leq t \leq n$.
  - Golobi: členi a_i - za vsak a_i določimo par (s, t), kjer s maks. dolžina naršč. podazap., t pa maks. dolžina padaj. podzap.
  - Golobov $mn + 1$, golobnjakov pa le mn.
  - Protislovje, saj za $i < j$ člena a_i in a_j ne moreta biti v istem golobnjaku (eno od maks. zaporedij za a_j lahko podaljšamo z a_i).

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368 75025 121393 196418 317811 514229 832040 1346269 2178309 3524578 5702887 9227465 14930352 24157817 39088169 63245986 102334155 165580141 267914296

Zgled: rep ničel

- Ali v Fibonaccijevem zaporedju obstaja člen, ki ima zadnjih 2022 števk enakih 0?
  - Spomnimo: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ in $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za vse $n \geq 0$.
  - Golobnjaki: pari (s, t), kjer $0 \leq s, t < 10^{2022}$.
  - Golobi: pari (f_{n+1}, f_n), kjer $n \geq 0$.
  - Golob gre v ustrezen golobnjak glede na ostanka f_{n+1} in f_n pri deljenju z 10^{2022}.
  - Obstajata (f_{n+1}, f_n) in (f_{m+1}, f_m), $n > m$, v istem golobnjaku.
  - Sledi $f_{n-i} \equiv f_{m-i} \pmod{10^{2022}}$ za vse i, $0 \leq i \leq m$.
  - Torej 10^{2022} deli člen f_{n-m}.

Zgled: IMO 1985

IMO 1985

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = n^4$$

Zgled: IMO 1985

- Naključno izberemo 1985 naravnih števil, od katerih nobeno ni deljivo s praštevilom, ki presega 26. Je zagotovo mogoče najti 4 od izbranih števil, katerih produkt je popolna četrta potenca?
  - Na voljo so torej praštevila $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ in 23.
  - Golobnjaki: $(\delta_2, \delta_3, \delta_5, \delta_7, \delta_{11}, \delta_{13}, \delta_{17}, \delta_{19}, \delta_{23})$, $\delta_i \in \{0, 1\}$.
  - Golobi: izbrana števila (so oblike $2^{i_2} 3^{i_3} 5^{i_5} \cdots 23^{i_{23}}$).
  - Dobivamo pare števil z istim "podpisom" (produkt torej popoln kvadrat).
  - Dokler vsaj $2^9 + 1 = 513$, vsaj še en par.
  - Torej vsaj 737 parov.
  - Ponovimo za produkte (tokrat $\delta_i \in \{0, 2\}$).