4. predavanje: Euler in kompleksna števila, 9.3.2016

''Razumeti znanost je poznati njeno zgodovino.''

August Comte

V Italiji so od 13. do 16. stoletja po zgledu postopka za rešitev enačbe 2. stopnje matematiki iskali podobne postopke oziroma formule za reševanje enačb 3. In 4. stopnje. Ker še ni bilo razvitega matematičnega simbolizma, so uporabljali besedne opise postopkov, ki pripeljejo do rešitev. Ti postopki so bili dostikrat razloženi le na konkretnih številskih primerih.

Kompleksna števila se v zgodovini najprej pojavijo v rešitvah enačbe 3. stopnje, kjer v Cardanovih formulah, objavljenih v knjigi *Ars Magna* (1545) nastopajo kvadratni koreni iz negativnih števil. Namesto originalne izpeljave Scipiona del Ferra (1515) smo si ogledali Eulerjev dokaz Cardanove formule za reducirano kubično enačbo $x^3 = mx + n$ iz njegove knjige *Elementi algebre* (1770). Razčlenili smo idejo in strukturo tega dokaza (ki temelji na vpeljavi dveh pomožnih spremenljivk p in q in njuni izražavi s $p + q$ in $p - q$, izražavi $p - q$ s $p + q$ in pq, ter dveh enačbah, ki povezujeta pq in m ter $p + q$ in n).

Kompleksna števila nastopajo tudi v rešitvi problema, ki ga je obravnaval Cardano: *Poišči dve števili, katerih vsota je 10, produkt pa 40*. Matematiki so imaginarna števila najprej gledali z nezaupanjem, saj si niso mogli predstavljati drugačnih števil kot takih, ki pomnožena sama s seboj dajo nenegativno število. Zdela so se jim le zanimiva miselna konstrukcija brez realne eksistence.

Le počasi je prevladalo spoznanje, da so ta števila koristna in omogočajo elegantne rešitve mnogih problemov. K temu je v veliki meri pripomogel prav Euler, ki je izpeljal mnoge temeljne formule za računanje s kompleksnimi števili. S pomočjo polarnega zapisa kompleksnega števila in DeMoivrove formule je pokazal, da ima vsako kompleksno število a + bi natanko n korenov, ki so spet oblike $M + Ni$, torej kompleksna števila. Razrešil je uganko logaritmov negativnih števil, okrog katere sta se prerekala Johann Bernoulli in Gottfried Wilhelm Leibniz, in naredil še korak dlje: definiral je logaritem kompleknega števila ter sinus in kosinus kompleksnega števila in pokazal, da tudi v kompleksnem velja analogija Pitagorovega izreka $sin^2(a + bi) + cos^2(a + bi) = 1$, kar je bila zanj ena od potrditev, da so njegove definicije pravilne. Izpeljal je tudi t.i. Eulerjevo identiteto $e^{ix} = \cos x + i.\sin x$, za katero je podal kar tri dokaze; iz nje sledi slavna formula $e^{i\pi} - 1 = 0$, v kateri nastopa pet najpomembnejših matematičnih konstant. Vpeljal je oznako i za kvadratni koren iz minus 1, in izračunal i^i, torej i na potenco i!

K uveljavitvi kompleksnih števil je močno pripomogla tudi njihova vizualna predstavitev s točkami na ravnini, ki jo je predlagal že Argand (1806), uveljavila pa se je šele, ko je isto predlagal Gauss (1831). Povedali smo tudi, kako je Wallis prvi prišel na idejo, predstaviti realna števila na številski premici. Množenje s kompleksnimi števili se je zdaj dalo lepo ponazoriti kot kompozitum raztega in rotacije ravnine.

Hamilton, ki je prvi predstavil kompleksna števila z urejenimi pari realnih števil, je dolgo zaman poskušal nekaj podobnega storiti tudi za točke v prostoru: iskal je pravilo za množenje urejenih trojk, da bi s takšnim množenjem izrazil rotacije trirazsežnega prostora. To mu je uspelo šele, ko se je otresel čvrsto zakoreninjenega predsodka, da mora veljati komutativnostni zakon za množenje tudi v tem primeru, in pa, ko je namesto urejenih trojk uporabil urejene četverice, t.i. *kvaterninone*. Iz njegovega pravila za množenje sta nastali pravili za vektorski in skalarni produkt vektorjev v trirazsežnem prostoru.

Zanimivost: teorija matrik (nastala okrog 1850) je omogočila, da lahko kompleksna števila predstavimo tudi s kvadratnimi matrikami 2 x 2.

Nazadnje smo omenili nekaj uporab kompleksnih števil v fiziki in geometriji.

Dodatno branje za tiste, ki želijo bolje spoznati kompleksna števila:

An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$, *Reviewed by Brian E. Blank*
Notices of the AMS, Volume 46, Number 10, November 1999

V tem članku (recenziji knjige), dostopnem tudi na spletu, boste našli obširen seznam literature v zvezi s kompleksnimi števili in njihovo zgodovino.